ENSA-ALHOCEIMA **ANALYSE 4**
CPII. **SEMESTRE 4**

Exercice 1

Calculons les intégrales suivantes :

a) *Pour l'intégrale I on calcule d'abord,* $\boldsymbol{a = \int_0^x x^2 e^{xy} dy}$:

On a

$$a = \int_0^x x^2 e^{xy} dy = x^2 \int_0^x e^{xy} dy = x^2 \left[\frac{e^{xy}}{x}\right]_{y=0}^{y=x} = x^2 \frac{e^{x^2}-1}{x} = x^2 \frac{e^{x^2}-1}{x}$$

Par suite,

$$I = \int_0^1 \left(xe^{x^2} - x\right)dx = \left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{e-1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e}{2} - 1$$

b) *Posons* $\boldsymbol{b = \int_0^x \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} dy}$. *On a :*

$$b = \int_0^x \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} dy = \frac{1}{(1+x^2)} \int_0^x \frac{1}{(1+y^2)} dy$$

$$= \frac{1}{(1+x^2)} [Arctany]_{y=0}^{y=x} = \frac{Arctanx}{(1+x^2)}$$

D'où,

$$J = \int_0^1 \frac{Arctanx}{(1+x^2)} dx = \frac{1}{2}[(Arctanx)^2]_0^1 = \frac{\pi^2}{32}$$

c) *Pour K, on a*

$$K = \int_1^a \left(\int_1^b xye^{x+y} dy\right) dx = \int_1^a xe^x \left(\int_1^b ye^y dy\right) dx$$

$$= \left(\int_1^a xe^x dx\right) * \left(\int_1^b ye^y dy\right)$$

Calculons $\boldsymbol{c = \int_1^a xe^x dx}$ *en utilisant une intégration par parties:*

Posons $\begin{cases} f(x) = x \\ g'(x) = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 1 \\ g(x) = e^x \end{cases}$

Par suite,

$$c = [xe^x]_1^a - \int_1^a e^x dx = [xe^x]_1^a - [e^x]_1^a = e^a(a-1)$$

D'une façon analogue, on trouve $\int_1^b ye^y dy = e^b(b-1)$.

Finalement, on aboutit à:

$$K = e^{a+b}(a-1)(b-1)$$

d) *Calculons* $L = \iint_D x^2\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$

Avec $D = \{(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2 :\ x \geq 0,\ y \geq 0\ et\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.
En utilisant les coordonnées polaires, on pose

$$\begin{cases} x = r cos\theta \\ y = r sin\theta \end{cases} \quad avec \quad 0 \leq r \leq 1\ \ et\ \ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Par suite,

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (r cos\theta)^2 \sqrt{1-r^2}\ r dr d\theta$$

$$= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos\theta)^2 d\theta\right) * \left(\int_0^1 r^3 \sqrt{1-r^2}\ dr\right)$$

Posons $\boldsymbol{I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos\theta)^2 d\theta}$ *et* $\boldsymbol{J = \int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}\ dr}$.

D'une part, on a $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+cos(2\theta)}{2} d\theta = \left[\frac{\theta}{2} + \frac{sin(2\theta)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.

D'une autre part, pour J, on utilise une intégration par partie.

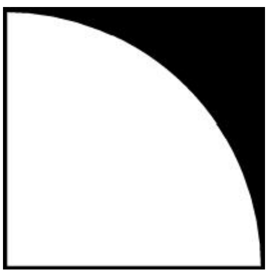
Posons $\begin{cases} u(r) = r^2 \\ v'(r) = r\sqrt{1-r^2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(r) = 2r \\ v(r) = \frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}} \end{cases}$

Par suite,

$$J = \left[\frac{r^2}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 2r(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\ dr$$

$$= \left[\frac{r^2}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \frac{1}{3}\left[\frac{2}{5}(1-r^2)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{15}$$

Finalement, $L = I * J = \frac{\pi}{30}$.



De même pour $M = \iint \frac{y}{1+x^2} dxdy$ *, on effectue un changement de variables en coordonnées polaires et on aboutit à*

$$M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \frac{rsin\theta}{1+(rcos\theta)^2}\ rdrd\theta = -\int_0^1 r\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-rsin\theta}{1+(rcos\theta)^2}\ d\theta\right)dr$$

$$= -\int_0^1 r[Arctan(rcos\theta)]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} dr = \int_0^1 rArctanr\ dr$$

En utilisant une intégration par parties, on pose

$$\begin{cases} u(r) = Arctanr \\ v'(r) = r \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(r) = \dfrac{1}{1+r^2} \\ v(r) = \dfrac{r^2}{2} \end{cases}$$

Par suite,

$$M = \int_0^1 rArctanr\ dr = \left[\frac{r^2}{2} Arctanr\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{r^2}{1+r^2} dr$$

$$= \left[\frac{r^2}{2} Arctanr - \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}Arctanr\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

<u>Exercice 2</u>

1) *On a,* ***pour*** $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$

$$\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{e^x cos^2 y + e^{-x} sin^2 y} dy = \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{e^{-x} sin^2 y\left(1 + \left(\frac{e^x}{tany}\right)^2\right)} dy$$

$$= -\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\frac{e^x}{sin^2 y}}{\left(1+\left(\frac{e^x}{tany}\right)^2\right)} dy = -\left[Arctan\left(\frac{e^x}{tany}\right)\right]_{y=\varepsilon}^{y=\frac{\pi}{4}}$$

$$= -Arctan(e^x) + Arctan\left(\frac{e^x}{tan\varepsilon}\right)$$

Comme, $\forall x \in \mathbb{R}: e^x > 0$ *et* $lim_{\varepsilon\to 0^+} tan\varepsilon = 0^+$ *alors:*

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\frac{e^x}{tan\varepsilon}\right) = +\infty \quad et \quad par \quad suite \quad \lim_{\varepsilon\to 0^+} Arctan\left(\frac{e^x}{tan\varepsilon}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

D'où, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{e^x cos^2 y + e^{-x} sin^2 y} dy = \frac{\pi}{2} - Arctan(e^x).$

Or on sait que: $\forall \boldsymbol{x > 0}$: $\boldsymbol{Arctanx + Arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}}$ *, ce qui implique que:* $Arctan(e^x) + Arctan(e^{-x}) = \frac{\pi}{2}.$

Finalement,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{e^x cos^2 y + e^{-x} sin^2 y} dy = Arctan(e^{-x})$$

2) D'après ce qui précède, on a :

$$\int_{-2}^{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{e^x cos^2 y + e^{-x} sin^2 y} dy \right) dx = \int_{-2}^{2} Arctan(e^{-x}) dx$$

$$= \int_{-2}^{0} Arctan(e^{-x}) dx + \int_{0}^{2} Arctan(e^{-x}) dx$$

Posons: $\boldsymbol{I = \int_{-2}^{0} Arctan(e^{-x}) dx}$.

En effectuant le changement de variables $t = -x$ *, on trouve:*

$$dt = -dx \quad et \quad \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 0 \end{cases}$$

Et par suite, $I = -\int_2^0 Arctan(e^t) dt = \int_0^2 Arctan(e^t) dt.$

On en déduit donc:

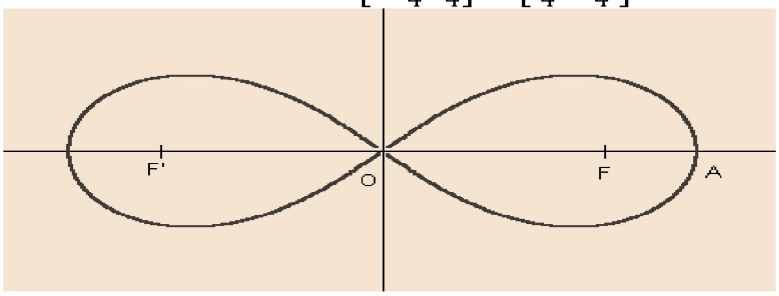
$$\int_{-2}^{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{e^x cos^2 y + e^{-x} sin^2 y} dy \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left(Arctan(e^x) + Arctan(e^{-x}) \right) dx = \int_0^2 \frac{\pi}{2} dx = \pi$$

Exercice 3

Calculons l'aire intérieure à ***la lemniscate*** *d'équation polaire :*

$$r = a\sqrt{cos(2\theta)} \quad ou \quad \theta \epsilon \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right] \quad et \quad a > 0.$$



Il est clair que la surface S de cette forme géométrique qu'on note Δ, en utilisant les coordonnées polaires, est :

$$S = \iint_{\Delta} r dr d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{a\sqrt{cos(2\theta)}} r dr \right) d\theta + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \left(\int_0^{a\sqrt{cos(2\theta)}} r dr \right) d\theta$$

Par raison de symétrie, on obtient

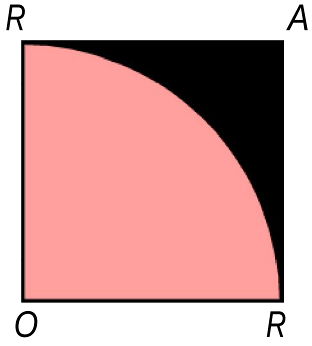
$$\boldsymbol{S} = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{a\sqrt{cos(2\theta)}} rdr\right)d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}[r^2]_0^{a\sqrt{cos(2\theta)}}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2a^2cos(2\theta)d\theta$$

$$= [a^2 sin(2\theta)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boldsymbol{a^2}$$

Exercice 4

Soit $R > 0$, $D = \{(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2:\ x \geq 0,\ y \geq 0\ et\ \ x^2 + y^2 \leq R^2\}$ *c'est le quart du disque de centre O et de rayon R coloré en rose*

Et $\Delta = \{(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2:\ 0 \leq x \leq R,\ 0 \leq y \leq R\}$ *c'est le carré* $[0,R] \times [0,R]$.



1) *En utilisant le changement de variables en coordonnées polaires, on trouve:*

$$I(R) = \iint_D e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^R re^{-r^2}dr\right)d\theta$$

$$= \left(\int_0^R re^{-r^2}dr\right) * \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\right) = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^R = \frac{\pi\left(1 - e^{-R^2}\right)}{4}$$

2) *On pose :* $J(R) = \iint_\Delta e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$ *.*

D'après la figure ci dessus, comme $OA = \sqrt{2}R$ *alors* $D \subset \Delta \subset D'$ *avec* $D' = \{(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2:\ x \geq 0,\quad y \geq 0\quad et\ \ x^2 + y^2 \leq OA^2 = 2R^2\}$

Par suite,

$$I(R) \leq J(R) \leq I\left(\sqrt{2}R\right)$$

Ce qui est équivalent à:

$$\frac{\pi\left(1 - e^{-R^2}\right)}{4} \leq J(R) \leq \frac{\pi\left(1 - e^{-2R^2}\right)}{4}$$

D'où, l'encadrement de J.

3) *Comme,*

$$J(R) = \iint_\Delta e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy = \int_0^R\left(\int_0^R e^{-(x^2+y^2)}dx\right)dy$$

$$= \left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right) * \left(\int_0^R e^{-y^2}dy\right) = \left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2$$

Et d'après ce qui précède, on aboutit à:

$$\frac{\pi\left(1-e^{-R^2}\right)}{4} \leq \left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2 \leq \frac{\pi\left(1-e^{-2R^2}\right)}{4}$$

D'une autre part, on a

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{\pi\left(1-e^{-R^2}\right)}{4} = \lim_{R\to+\infty} \frac{\pi\left(1-e^{-2R^2}\right)}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Par suite, d'après le théorème d'encadrement des limites, la fonction

$f: R \mapsto \int_0^R e^{-x^2}dx$ *admet une limite en* $+\infty$ *et*

$$\lim_{R\to+\infty} \left(f(R)\right)^2 = \lim_{R\to+\infty} \left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

Finalement,

$$\int_0^{+\infty} \boldsymbol{e^{-x^2}dx} = \frac{\sqrt{\boldsymbol{\pi}}}{\mathbf{2}}$$

Remarque:

Cet exercice nous propose une deuxième méthode pour montrer que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$$

La première méthode vue dans la série 2 exercice 6.